Mini projet -2

OBJECTIFS :

1. L'équation différentielle d'un mouvement forcé
2. Les différentes solutions du problème
3. Le phénomène de résonance
4. Application en génie civil

Dans ce problème, on se propose d'étudier le comportement vibratoire de matériaux en caoutchouc afin de l'utiliser dans la construction, représenté dans la figure 1.

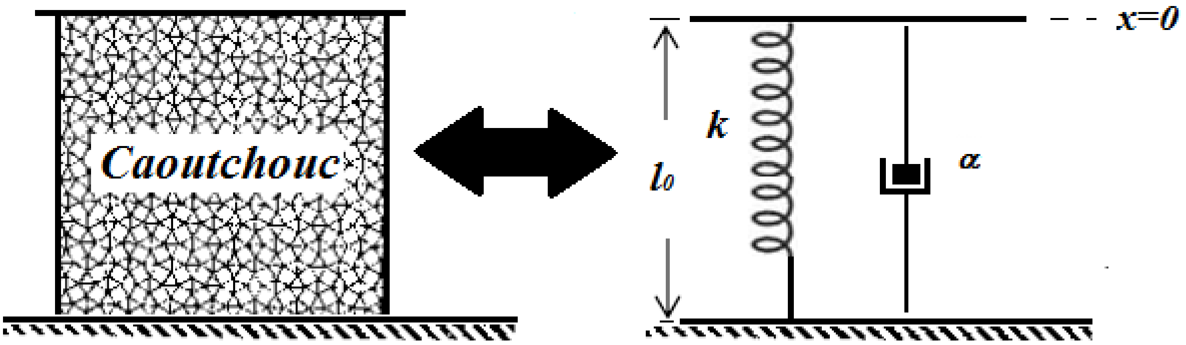

Figure 1: Modélisation physique du mouvement oscillatoire du caoutchouc

Nous assimilons l'élasticité du matériau à celle d'un ressort de raideur k, de longueur à vide l_0 et les pertes énergétiques par frottement à celle ayant lieu dans un amortisseur de coefficientα. Le ressort ainsi considérés sont associés en parallèle. On néglige le poids du caoutchouc devant les forces mise en jeu.

Partie A :

On place un bloc de masse $m=1t$ sur le caoutchouc qui se comprime d'une distance d et prend une valeur de l. Après une compression supplémentaire, on relâche le système oscillé autour de sa position d'équilibre qu'on le repère par la coordonnée $x(t)$ comme le montre la figure 2

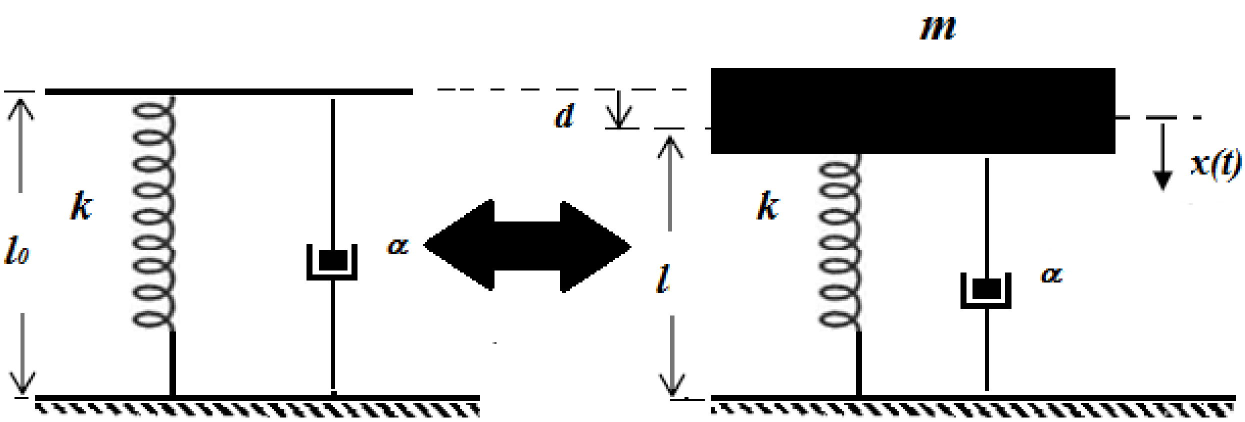

Figure 2: Mouvement oscillatoire du « caoutchouc +le bloc »

- Le système est en équilibre :
  - Déterminer l'énergie potentielle.
  - En déduire la compression $d=l-l_0$.
- Le système physique maintenant oscille.
  - Déterminer l'énergie cinétique.
  - En déduire le Lagrangien du système
- Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse m
- Donner la solution générale de la solution $x(t)$ sachant que le mouvement a un mouvement oscillatoire amorti.
- Donner l'expression du décrément logarithmique δ.

  L'intervalle de temps, $\Delta t=0.2s$ qui sépare le premier et le sixième maximum. Correspond à la diminution d'amplitude de 60%.

  Déterminer les valeurs de k et α.
- On refait la même expérience avec un autre caoutchouc. On trouve $\alpha'=4.510^3$Kg/s. Au bout de combien de temps, $\Delta t'$, obtient-on la même diminution d'amplitude que dans l'expérience précédente ?
- Quel est le matériau le plus adéquat pour la construction ?

Partie B :

On prend dans cette partie un caoutchouc de caractéristiques physiques suivantes : $k=25 10^6 N/m$ et $\alpha=10^4 Kg/s$ qui sera utilisé dans la construction d'un pont d'autoroute, de masse $m=12.5t$.

On assimile l'effet du passage des véhicules sur le pont à celui d'une force sinusoïdale $F(t)$ d'amplitude $F_0=10kN$ et de pulsation ω, appliquée perpendiculairement au pont comme le montre la figure 3

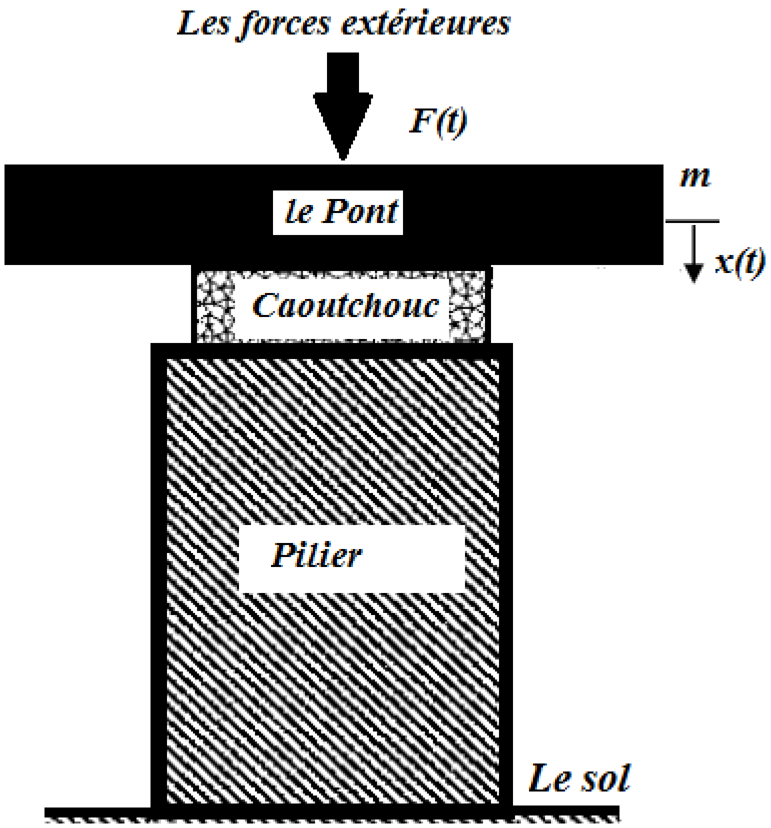

Figure 3 : Modélisation physique du mouvement du pont

- Etablir le Lagrangien du système.
- Exprimer l'équation différentielle du mouvement du pont pour la coordonnée $x(t)$ donnant son déplacement par rapport à l'état d'équilibre.
- Déterminer l'expression de la solution $x(t)$ en régime permanent.

- Déterminer la fréquence de résonance $\boldsymbol{f_r}$
- Donner l'expression de l'amplitude maximale à laquelle le pont peut vibrer.
- Quelle est la phase correspondante dans ce cas-là ?
- Calculer l'énergie communiquée au pont pendant un intervalle de temps égale à une période, lorsque le passage des véhicules le fait vibrer à la fréquence de résonance.
- Déterminer l'énergie dissipée par la force de frottement pend la même période. Interpréter le résultat.

Solutions

Partie A

- L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = \frac{1}{2}k(d+x)^2 - mg(d+x)$$

En équilibre on a:

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad kd - mg = 0$$

D'où la compression est égale à :

$$d = \frac{mg}{k}$$

- Le système est en mouvement ; L'énergie cinétique devient:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

D'où le Lagrangien s'écrit alors

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k(d+x)^2 + mg(d+x)$$

- L'équation différentielle du mouvement est égale à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha\dot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx + \underbrace{kd - mg}_{=0} = -\alpha\dot{x}$$

D'où :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Avec les constantes :

$$\xi = \frac{\alpha}{2m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

- Puisque le mouvement est de nature oscillatoire amorti ; la solution est de la forme :

$$x(t) = Ae^{-\xi t}\cos(\omega t + \varphi)$$

D'où la pulsation du mouvement est égale à :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2}$$

- Ainsi, le décrément logarithmique est calculé comme suit :

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \xi T$$

La décroissance après cinq périodes on a :

$$\ln\frac{x(t)}{x(t+5T)} = \ln\frac{1}{0.4} = 5\underbrace{\xi T}_{\delta} \quad \Rightarrow \quad \delta = -\frac{\ln 0.4}{5} = 0.183$$

La période T'après intervalle de temps Δt est égale à :

$$\Delta t = 5T = 0.2s \quad \Rightarrow \quad T = 0.04s$$

- Le coefficient d'amortissement α est déterminé à partir de δ :

$$\delta = \xi T = \frac{\alpha}{2m}T \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2m\delta}{T} = 9.1510^3 kgs^{-1}$$

- La constante de raideur k est obtenue à partir de la pulsation ω :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \xi^2} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \sqrt{\omega^2 + \xi^2}$$

D'où :

$$\frac{k}{m} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{\alpha}{4m^2}}^2 \quad avec \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad et \quad \xi = \frac{\alpha}{2m}$$

Alors on a :

$$k = m\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{\alpha}{4m^2}}^2 = 24.910^6\, Nm^{-1}$$

- Le rapport d'amplitude qui correspond à la même diminution est donné comme suit :

$$\ln\frac{Ae^{-\xi' t}}{Ae^{-\xi'(t+\Delta t')}}=\ln\frac{1}{0.4}=\xi'\Delta t' \quad\Rightarrow\quad \Delta t'=\frac{\ln 0.4}{\xi'}$$

Avec :

$$\xi'=\frac{\alpha'}{2m}$$

Alors le temps $\Delta t'$ est égale à :

$$\Delta t'=\frac{2m'}{\alpha'}\ln 0.4=0.407s$$

- Dans la deuxième expérience ; on obtient la même diminution d'amplitude au bout d'un temps deux fois plus long. Le premier matériau amortit plus les vibrations. Donc il est le mieux approprié pour la construction.

Partie B

- Le Lagrangien s'écrit comme suit :

$$L(x,\dot{x})=E_c-E_p=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}k(d+x)^2+mg(d+x)$$

- L'équation différentielle du mouvement s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})-\frac{\partial L}{\partial x}=-\alpha\dot{x}+F(t) \quad\Rightarrow\quad m\ddot{x}+kx+\underbrace{kd-mg}_{=0}=-\alpha\dot{x}+F(t)$$

D'où :

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=F(t) \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F(t)}{m}$$

C'est une équation différentielle linéaire nom homogène. Elle admet une solution générale et une solution particulière.

- La solution de l'équation différentielle :

En posant les constantes suivantes :

$$\xi = \frac{\alpha}{2m} \quad et \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

L'équation différentielle devient alors :

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

En supposant que la forme de f(t) est sinusoïdale :

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

- En régime permanent la solution particulière est de la forme suivante :

$$x(t) = A_0 \cos(\Omega t + \varphi) = R_e A_0 e^{i(\Omega t + \varphi)}$$

D'où

$$\dot{x}(t) = j\Omega A_0 e^{j(\Omega t + \varphi)}$$
$$\ddot{x}(t) = -\Omega^2 A_0 e^{j(\Omega t + \varphi)}$$

Alors l'amplitude s'écrit sous la forme :

$$A_0 e^{j\varphi}\left(-\Omega^2 + \omega_0^2 + 2\xi j\Omega\right) = \frac{F_0}{m}$$

❖ Le module s'écrit :

$$|A_0(\Omega)| = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}}$$

❖ Et l'argument sous la forme :

$$\varphi = Artg\,\frac{2\xi\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}$$

- La fréquence de résonance est déterminée lorsque la réponse du système est maximum ; d'où :

$$\frac{d|A_0(\Omega)|}{d\Omega} = 0$$

Alors la fréquence de résonance s'exprime comme suit :

$$f_r = \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\xi^2}}{2\pi} = 7.12 s^{-1}$$

- En remplaçant dans l'amplitude la pulsation de résonance, L'amplitude maximale s'écrit alors:

$$\left|A_0(\Omega_r)\right|_{\max} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - 2\xi^2 - \omega_0^2)^2 + 4\xi^2(\omega_0^2 - 2\xi^2)}}$$

D'où :

$$\left|A_0(\Omega_r)\right|_{\max} \approx \frac{F_0}{2\alpha\omega_0} = 2.23cm \qquad avec \quad \xi \prec\prec \omega_0$$

- La phase correspondante dans ce cas-là est exprimée comme suit :

$$\varphi(\Omega_r) = Artg\,\frac{2\xi\Omega_r}{\Omega_r^2 - \omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\Omega_r) = -Artg\,\frac{M\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha}{2m^2}}^{\,2}}{\alpha} \approx -\frac{\pi}{2}$$

- La puissance fournie est exprimée comme suit :

$$P_f(t) = F(t)\dot{x}(t) \quad \Rightarrow \quad P(t) = -\omega_0\, AF_0 \cos\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Ainsi que l'énergie communiquée est égale :

$$E_f = \int_0^T P_f(t)dt \quad \Rightarrow \quad E_f = -\omega_0\, AF_0 \int_0^T \cos\omega_0 t \sin(\omega_0 t + \varphi)dt$$

D'où

$$E_f = -\omega_0 AF_0 \frac{\sin\varphi}{2} T_0 \quad \Rightarrow \quad E_f = \pi\omega_0 AF_0 \cong 700.6J$$

- Par contre la puissance dissipée se calcule comme suit :

$$P_d(t) = F_{fr}(t)\dot{x}(t) = -\alpha\dot{x}^2(t) \quad \Rightarrow \quad P_d(t) = -\alpha\omega_0^2\, A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

- Ainsi l'énergie dissipée est égale à :

$$E_d = \int_0^T P_d(t)dt \quad \Rightarrow \quad E_d = -\alpha\omega_0^2\, A^2 \int_0^T \sin^2(\omega_0 t + \varphi)dt$$

D'où :

$$E_d = -\frac{T_0}{2}\alpha\omega_0^2 A^2 \quad \Rightarrow \quad E_d = -\alpha\pi\omega_0 A^2 \approx 398.6$$

- On remarque que $|E_d| \approx |E_d|$

  On peut en conclure que l'énergie communiquée au pont pendant une période se dissipe complétement dans l'amortisseur.