École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

Corrigé de la série de TD N° 6

Exercice 01 :Théorème des éléments correspondants

Considérons deux conducteurs A et B portant des charges Q_A et Q_B et deux éléments de surfaces dS_A et dS_B. Un tube de flux est construit sur la base de ces deux surfaces élémentaires. Calculons le flux à travers la surface fermé de ce tube. En fait, on sait d'après le théorème de Gauss que :

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int\int_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int\int_{S_A} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int\int_{S_B} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Mais on sait que E à l'intérieur d'un conducteur en équilibre est nul, d'où :

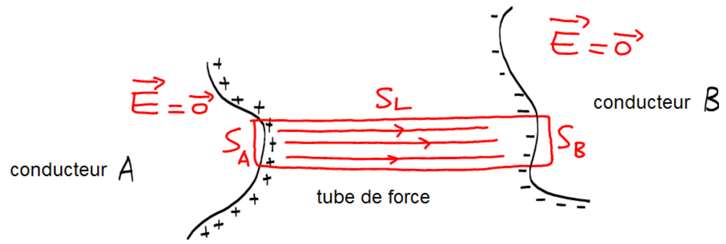

Figure 1 – Théorème des éléments correspondants

$$\int\int_{S_A} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int\int_{S_B} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Et le champ électrique entre les deux conducteurs est parallèle à S_L , d'où

$$\int\int_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$

;mais

$$Q_int = Q_B + Q_A = 0$$

ce qui donne :

$$\boxed{Q_A = -Q_B}$$

Dans le cas d'une influence totale (A entourant complètement le conducteur B) le conducteur B est chargé à une distribution σ_B, alors sur la face intérieure de A va apparaitre une charge $-\sigma_A$ telle que :

$$\int\int_{S_A} \sigma_A \cdot d\vec{S} = -\int\int_{S_B} \sigma_B \cdot d\vec{S}$$

A l'extérieur du conducteur A va apparaitre une charge Q^A_{ext} égale à la charge Q_A^{int} mais de polarité opposée. C'est comme si la charge Q_A^{ext} va nous révéler la quantité de charge du conducteur B à l'intérieur du conducteur A.

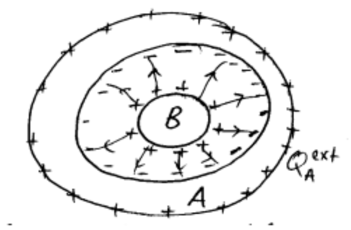

FIGURE 2 – Influence totale

1. On applique le théorème de Gauss en considérant une surface de Gauss S à l'intérieur du conducteur A. Sachant que le champ est nul à l'intérieur du conducteur A (équilibre électrostatique) on a :

$$\phi = \int\int_S \vec{E_{int}} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_B + Q_A^{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$

d'où : Q_A^{int}=-Q_B

2. – cas où le conducteur A est initialement neutre :

$$Q_A^{\text{int}} + Q_A^{\text{ext}} = 0$$

$$Q_A^{\text{ext}} = -Q_A^{\text{int}} = Q_B$$

La charge portée par A sur sa surface externe est égale à la charge portée par le conducteur B.

– cas où le conducteur A porte initialement une charge électrique q :

$$Q_A^{\text{int}} Q_A^{\text{ext}} = q$$

$$\boxed{Q_A^{\text{ext}} = q - Q_A^{\text{int}} = q + Q_B}$$

Exercice 02 :

1. On sait d'après le résultat précédent que le champ électrique entre deux armatures chargées de même quantité de charge électrique mais mais de polarités opposées est (dans l'air) égal à

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

alors que dans un matériau quelconque le champ

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

où ε est la permittivité électrique du matériau et σ la densité surfacique de la charge électrique.

Les deux armatures sont supposées portées à deux potentiels différents, d'où :

$$V(d) - V(0) = -\int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(d) - V(0) = \int_0^{x_1} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot dx + \int_{x_2}^{d} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot dx$$

$$V(d) - V(0) = \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot x_1 + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot (x_2 - x_1) + \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot (d - x_2)\right]$$

La charge électrique répartie sur une armature est donnée par

$$Q = \sigma\, S$$

et par définition la capacité du condensateur est le rapport entre la charge Q et la différence de potentiel entre les deux armatures :

$$C = \frac{Q}{V(d) - V(0)}$$

ou encore

$$C = \frac{\sigma S}{\left[\sigma \frac{x_1}{\varepsilon_0} + \frac{(x_2 - x_1)}{\varepsilon} + \frac{(d - x_2)}{\varepsilon_0}\right]}$$

Ce qui donne :

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{x_1 \varepsilon + (x_2 - x_1)\varepsilon_0 + (d - x_2)\varepsilon}$$

2.a cas où le matériau isolant occupe tout l'espace entre les deux armatures : on a : $x_1 = 0$ et $x_2 = d$ d'où

$$C = \frac{S\varepsilon}{d}$$

la valeur de C ne dépend que de la géométrie du condensateur et de la permittivité diélectrique du matériau inséré entre les armatures

2.b cas où l'espace entre les deux armatures est vide (air) $x_1 = x_2$ d'où :

$$C = \frac{S\epsilon_0}{d}$$

3. L'expression de l'énergie potentielle électrostatique d'une charge distribuée sur une surface (avec une densité σ) est :

$$E_p = \frac{1}{2}\int \sigma(\vec{r}) \cdot V(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

Ou $V(\vec{r})$ est le potentiel électrostatique créé entre tous points sur la surface. Puisque chaque armature est portée à un potentiel constant $V_(d)$ pour le plan en haut et $v_(0)$ pour le plan en bas nous aurons :

$$E_p = \frac{1}{2}\int \sigma \cdot V_d \cdot dS + 1/2\int (-\sigma) \cdot V_0 \cdot dS$$

Puisque V_d et V_0 sont constants :

$$E_p = \frac{1}{2}V_d \int \sigma \cdot dS - 1/2V_0 \int (-\sigma) \cdot dS$$

$$E_p = \frac{1}{2}(V_d - V_0) \cdot Q$$

avec

$$Q = C(V_d - V_0)$$

d'où :

$$E_p = \frac{1}{2}C(V_d - V_0)^2$$

Q est la charge portée par une seule armature, la charge totale du condensateur étant nulle

$$Q + (-Q) = 0$$

Exercice 03 :

1. La capacité d'un condensateur est définie par

$$C = \frac{Q}{V}$$

Q est la charge portée par une armature et V la différence de potentiel entre les deux armatures :

$$Q = C\,V = 10 \times 10^{-6}.12 = 1210^{-5} C\text{Coulomb}$$

2. L'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur est donnée par

$$Ep = \frac{1}{2} C V^2 = 5 \times 10^{-6}\,144 = 72 \times 10^{-5}\,J$$

3. La capacité d'un condensateur à armatures planes est donnée par :

$$C = \frac{S\varepsilon}{d}$$

où S est la surface de l'armature, ε la permittivité diélectrique de matériau inséré entre les deux armatures et d la distance entre les deux armatures. D'autre part, on sait que

$$Q = C\,V = \frac{S\varepsilon}{d} \cdot V$$

Pour un condensateur d'épaisseur d_1 on a :

$$Q_1 = \frac{S\varepsilon}{d_1} V$$

alors que pour le condensateur d'épaisseur d_2

$$Q_2 = \frac{S\varepsilon}{d_2} V$$

avec

$$d_2 = 2d_1$$

ce qui donne

$$Q_2 = \frac{1}{2}\frac{S\varepsilon}{d_1} V = \frac{1}{2} Q_1 = 610^{-5} C$$

4. Pour un condensateur de surface S_1 :

$$Q_1 = \frac{S_1\varepsilon}{d} V$$

et

$$Q_2 = \frac{S_2 \varepsilon}{d} \cdot V$$

avec

$$S_2 = \pi r_2^2$$

et

$$r_2 = 2r_1$$

on aura donc

$$S_2 = 4S_1$$

d'où :

$$Q_2 = 4Q_1 = 48 \cdot 10^{-5} C$$

Exercice 04 :

La sphère (à l'intérieur) de rayon R_1 porte une charge $+Q$ et portée à un potentiel électrostatique V_1, placée à l'intérieur d'une coquille sphérique de rayon intérieur R_2 et portant une charge $-Q_2$ avec un potentiel V_2. Le champ électrique entre les deux sphères étant radial et de

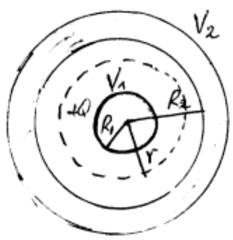

Figure 3 – Capacité d'un condensateur sphérique

symétrie sphérique, il est possible d'appliquer le théorème de Gauss, en prenant comme surface de Gauss la surface sphérique de rayon r. Cela nous permet d'écrire :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

ou encore

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

et

$$\vec{E} = E_r \, \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

D'autre part, on sait que

$$V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

avec

$$V(R_2) = V_2 \qquad \text{et} \qquad V(R_1) = V_1$$

On obtient donc

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{r^2}$$

avec

$$d\vec{\ell} = d_r\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta d\varphi d\vec{u}_\varphi$$

d'où :

$$V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$

ce qui donne enfin :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right]$$

où on a choisi $V_1 - V_2$ plutôt que $V_2 - V_1$, car ce dernier est négatif. La capacité du conducteur est donnée par :

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_2 - V_1} = 4\pi\epsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 + R_1}}$$

Exercice 05 :

Supposons que la longueur du cylindre est très grande devant les rayons des cylindres $L >> R_1, R_2$. Le champ électrique est dans ce cas radial($\vec{E} = E_r\,\vec{u}_r$) et a une symétrie cylindrique de rayon$r$ (sur une surface cylindrique de rayon r le module de $\vec{E}$ est le même). Cela nous permet d'appliquer le théorème de Gauss, en choisissant une surface cylindrique de rayon r ($R_1 < r < R_2$) comme surface de Gauss :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

avec

$$\vec{E} // d\vec{S}_L$$

en tout point sur la surface latérale

$$S_L = 2\pi rL$$

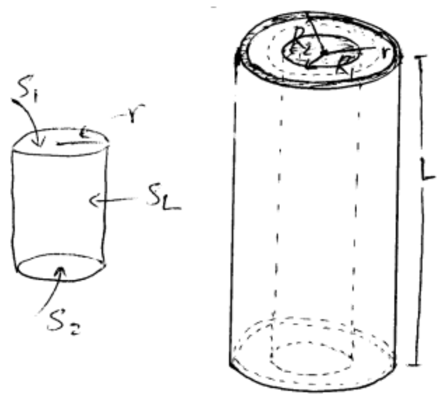

FIGURE 4 – Capacité d'un condensateur cylindrique

et

$$\vec{E} \perp d\vec{S_1}$$

et

$$\vec{E} \perp d\vec{S_2}$$

avec $d\vec{S_1}$ et $d\vec{S_2}$ des éléments de surface sur les surfaces en haut et en bas du cylindre choisi. On a donc

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int\int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int\int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\int\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int\int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int\int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r 2\pi r L$$

et

$$E_r 2\pi r L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

avec

$$Q_{int} = \sigma 2\pi r L$$

ce qui donne :

$$E_r = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\frac{R_1}{r}$$

ou encore

$$\vec{E} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{u}_r$$

D'autre part, on sait que :

$$V(R_2) - V(R_1) = -\int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V_2 - V_1 = -\frac{\sigma \cdot R_1}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} [\ln r]_{R_1}^{R_2}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

mais on sait que

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 L}$$

d'où :

$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \cdot \ln \frac{R_2}{dR_1}$$

on obtient :

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}}$$

Exercice 06 :

1. . La tension entre les points (bornes du condensateurs) A et B est égale à $24\,V$, ce qui permet à une charge électrique égale

   $$Q_A = CV = 33 \times 10^{-6} \cdot 24C = 792 \times 10^{-6}C$$

   de se mettre sur une armature du condensateur (l'autre armature portera la même charge Q_A mais de polarité différente). L'énergie électrostatique emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

   $$E_p = \frac{1}{2}CV^2 = 95.04 \times 10^{-4}J$$

2. les bornes A et B sont reliées aux bornes E et D d'un condensateur complètement déchargé.

   a à l'état initial (sans le condensateur entre E et D)le condensateur entre A et B porte une charge Q_A sur son armature proche de A. Après avoir connecté un deuxième condensateur entre E et D la charge Q_A se répartit sur les deux armatures proches de A et E (sur les deux armatures proche de B et D la même charge se répartit mais de potentiels différents). La conservation de la charge électrique donne

   $$\boxed{Q_A = q_A + q_E}$$

Aussi, le même potentiel s'établit entre les deux condensateurs, d'où :

$$V = \frac{q_A}{C_1} = \frac{q_E}{C_2}$$

ou encore

$$\frac{Q_A - q_E}{C_1} = \frac{q_E}{C_2}$$

La charge q_E s'obtient

$$\frac{Q_A}{C_1} = q_E\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = q_E\frac{C_1 + C_2}{C_1\,C_2}$$

ce qui donne

$$q_E = \frac{Q_A\,C_2}{(C_1 + C_2)}$$

Alors que

$$q_A = Q_A - q_E = Q_A(1 - \frac{C_2}{(C_1 + C_2)}) = Q_A\frac{C_1}{(C_1 + C_2)}$$

avec

$$q_E = 49.5 \times 10^{-6}\,C$$

et

$$q_A = 742.5 \times 10^{-6}\,C$$

d L'énergie emmagasinée dans le condensateur A après connexion est donnée par

$$E_p^A = \frac{1}{2}\frac{q_A^2}{C_1} = 83.53 \times 10^{-4}\,J$$

alors que celle emmagasinée dans le condensateur E est

$$E_p^E = \frac{1}{2}\frac{q_E^2}{C_2} = 7.57 \times 10^{-4}\,J$$

L'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs à l'état final est égale à :

$$E_p = E_p^A + E_p^E = 91.1 \times 10^{-4}\,J$$

On voit bien que cette valeur est inférieure à celle du condensateur A à l'état initial $(95.04 \times 10^{-4} J)$. Ceci est dû au fait qu'en réalité les fils de connexion utilisés ont une certaine résistance qui fait perdre au système de l'énergie électrostatique sous forme de chaleur (énergie calorifique : effet Joule.). Cette quantité d'énergie perdue est égale à :

$$\Delta E_p = 95.04 \times 10^{-4} - 91.1 \times 10^{-4} = 3.96\,J$$