École Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen

Département de Physique

PHYSIQUE I – TP N^o 01

Introduction aux travaux pratiques de physique

L. BOUFATAH

1 Introduction

Le but des travaux pratiques de physique est d'acquérir une connaissance de base des propriétés générales de la matière. En effet, les lois de la physique servent souvent de fondement aux autres sciences.
Nous discernons trois raisons aux travaux pratiques :
- illustrer et compléter le cours de physique,
- acquérir une certaine pratique expérimentale,
- apprendre à représenter et interpréter les résultats obtenus et enfin en tirer des conclusions.

2 Mesures

2.1 Notions d'erreur et d'incertitude

Il est fondamentalement impossible de trouver la valeur exacte d'une grandeur physique. En effet, pour chaque mesure, nous utilisons nos organes des sens et des appareils de mesure dont la sensibilité, aussi bonne soit-elle, est limitée. Nous devons donc savoir jusqu'à quel point nous pouvons nous fier à un résultat ; il importe de connaître la précision d'une mesure.
On appelle erreur sur une mesure la différence entre la valeur obtenue (valeur mesurée) et la valeur réelle (valeur exacte).

$$Erreur = valeur\ mesurée - valeur\ exacte.$$

L'erreur est une grandeur algébrique, positive si la mesure est par excès, négative si la mesure est par défaut.

2.1.1 Notation des incertitudes

- Incertitude absolue

Le résultat d'une mesure correctement menée est la certitude que x, la valeur numérique cherchée, soit comprise entre deux valeurs x_1 et x_2 :

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

En général, x_1 et x_2 sont assez voisins et l'on préfère écrire le résultat sous la forme :

$$x_0 - \Delta x \leq x \leq x_0 + \Delta x.$$

La quantité Δx s'appelle **l'incertitude absolue** sur la mesure ; c'est une quantité toujours positive, de même nature que x, qui s'exprime avec une unité. Le résultat d'une mesure se notera donc :

$$x = x_0 \pm \Delta x.$$

Exemple : m= 1.35 ± 0.02 kg veut dire que la masse m= 1.35 kg à 0.02 kg près.

- Incertitude relative, précision

La donnée de l'incertitude en elle même ne suffit pas pour indiquer la qualité de la mesure. Dire qu'une longueur, par exemple, est mesurée à 1 cm près ne donne aucune indication sur la qualité de la mesure.
La qualité d'une mesure est en fait donnée par sa précision ou **incertitude relative** rapport de l'incertitude absolue Δx, sur la mesure x, soit $\Delta x/x$.
L'incertitude relative est une grandeur sans dimension et s'exprime généralement en %.

Dans l'exemple précédent : $\Delta m/m = 0.02/1.35 = 0.015 = 1.5\%$.
Pratiquement, les incertitudes seront évaluées au laboratoire en tenant compte des deux facteurs suivants :
- Précision des appareils de mesure,
- Précision de mesure du manipulateur (en général, l'incertitude de lecture).

Ainsi l'incertitude absolue d'une grandeur x mesurée est tel que :

$$\Delta x = \Delta x_{appareil} + \Delta x_{manipulateur}$$

2.1.2 Incertitudes de lecture

• Pour un appareil fidèle correctement étalonné, l'incertitude de mesure se réduit à une incertitude de lecture. Que l'indication soit analogique ou digitale, il est impossible de donner une valeur exacte à la mesure.

• Avec un appareil de mesure à aiguille, il est d'usage de prendre pour incertitude une demi division (graduation). Mais la précision peut être meilleure quand l'aiguille est exactement sur une division et avec une aiguille fine, on peut donner le résultat à un quart de la division, soit à 0.25 division près.

• Avec un appareil à indication digitale, on admet alors qu'un nombre doit être considéré comme certain à une demi unité près du dernier chiffre indiqué. L'incertitude serait, par exemple, de 0.005 pour 1.25 ; elle serait de 0.0005 pour 1.250. Relevons que, dans ce cas, le zéro a une signification au même titre que les autres chiffres et qu'il ne peut être supprimé.

3 Chiffres significatifs

Les mesures et les résultats ne doivent être exprimés qu'avec un nombre de chiffres significatifs raisonnablement limité, le dernier chiffre à droite (ou éventuellement les deux derniers) restant seuls incertains. Ainsi, si une mesure de temps par exemple est donnée comme

$$t = (1.357 \pm 0.001)s$$

il serait insuffisant d'indiquer la mesure avec un nombre trop restreint de chiffres significatifs :

$$t = (1.3 \pm 0.001)s$$

D'autre part, il ne servirait à rien d'écrire des chiffres significatifs au-delà de ceux indiqués par la précision de la mesure, comme par exemple :

$$t = (1.356789 \pm 0.001)s$$

Donc, en résumé, il faut retenir les points suivants :
• Un résultat est toujours suivi de son incertitude absolue.
• Les nombres exprimant la grandeur et l'incertitude absolue s'écrivent avec le même nombre de décimales.
• Le nombre de chiffres significatifs est déterminé par la précision, c'est à dire par l'incertitude.
• L'unité doit toujours être indiquée.

4 Représentation graphique

4.1 Considération graphique du domaine d'erreur

Supposons que l'on ait étudié les variations d'une grandeur y en fonction d'une autre grandeur x entre lesquelles il existe une relation y = f(x) supposée ou prévue par la théorie.

Soient Δx et Δy les incertitudes absolues sur chacune des grandeurs. Portons, sur un graphique, les résultats de mesure $y = f(x)$ (voir Fig.1).

Comment traduire graphiquement les incertitudes expérimentales ?

Le point de mesure M est entouré d'un petit cercle. Le trait vertical représente l'incertitude absolue en plus ou moins sur y. Le trait horizontal représente celle sur x. Soit un rectangle tel que :

Si une grandeur doit être déterminée à partir d'un graphique, il est possible d'associer au résultat un intervalle d'incertitude grâce au tracé des rectangles d'erreurs.

1- On porte tous les points obtenus expérimentalement sur le graphe en choisissant une échelle de façon à ce que la courbe occupe une grande partie de la feuille millimétrée.

2- On entoure chacun des points par son rectangle d'erreur tout en respectant l'échelle choisie.

3- On trace la droite ayant la plus petite pente, soit b_{min}. Puis on trace la droite ayant la plus grande pente, soit b_{max} (voir Fig.2).

4- On calcule la pente moyenne $\bar{b}$ et l'erreur sur la pente moyenne $\Delta\bar{b}$ définies par les relations :

$$\bar{b} = \frac{b_{max} + b_{min}}{2} \quad et \quad \Delta\bar{b} = \frac{b_{max} - b_{min}}{2}.$$

Il faut que les droites (1) et (2) passent par le maximum de rectangles d'erreur.

5- à partir de $\bar{b}$ et de $\Delta\bar{b}$ on obtient la grandeur physique demandée avec son erreur.

- Que se passe t-il s'il n'y a pas d'erreur sur x ou y ?

Si $\Delta x = 0$, on obtient le graphe de la figure Fig.3.

Si $\Delta y = 0$, on obtient le graphe de la figure Fig.3.

- Si la droite ne passe pas par l'origine (voir Fig.4) :

En suivant le même raisonnement, on aura :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \frac{b_1 + b_2}{2} \quad et \quad \Delta\bar{b} = \frac{|b_1 - b_2|}{2} \\ \bar{a} &= \frac{a_1 + a_2}{2} \quad et \quad \Delta\bar{a} = \frac{a_1 - a_2}{2}, \end{aligned}$$

avec a_1 et a_2 étant les points d'intersection des droites ayant respectivement les pentes b_1 et b_2 avec l'axe Oy, .

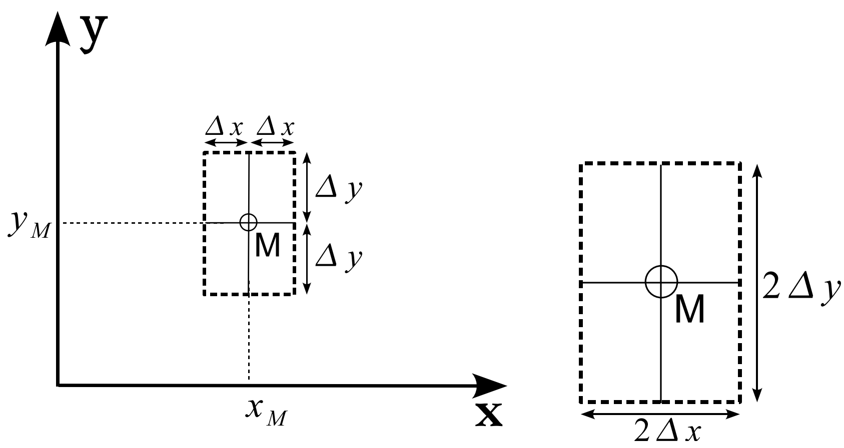

FIGURE 1 –

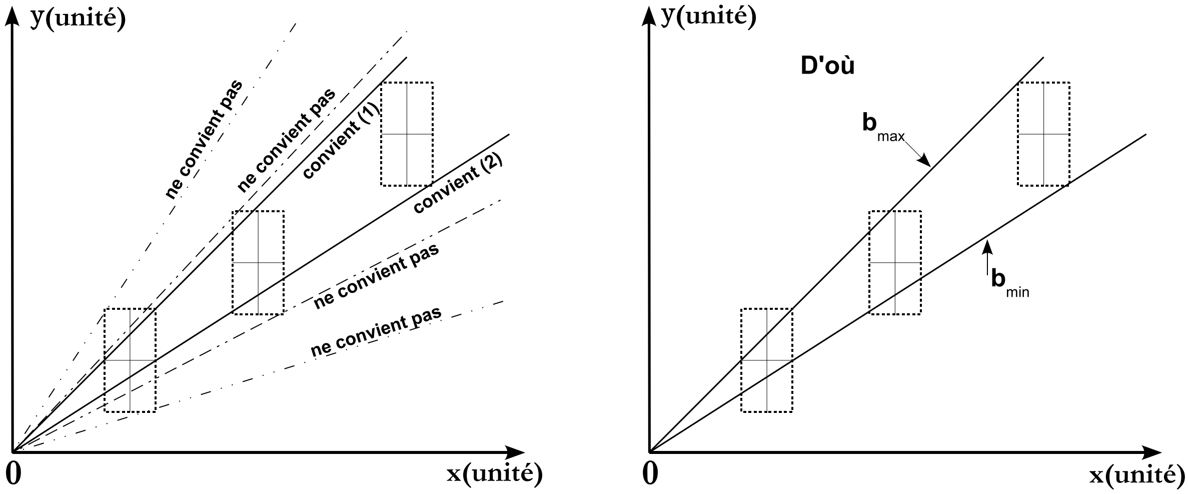

FIGURE 2 –

4.2 Régression linéaire et corrélation

Dans la plupart des expériences des travaux pratiques, quelques mesures, quelquefois une seule, suffisent. Cependant, si le phénomène observé est aléatoire, si la dispersion des mesures est grande, ou si l'on désire estimer l'erreur due à l'expérimentateur (chronométrage par ex.) une série de mesures est nécessaire. Les résultats seront alors traités de manière statistique.
Afin de faire face à l'incertitude concernant ces résultats, les statistiques s'avèrent être un outil adéquat. En particulier, l'analyse de régression est une des analyses statistiques intéressantes pour ceux qui travaillent avec des données quantitatives. Elle permet de produire un modèle de relation entre deux variables, d'estimer l'adéquation de ce modèle et de voir graphiquement la correspondance entre les données et le modèle.
On s'intéresse particulièrement au modèle de régression linéaire simple permettant de déterminer une relation linéaire entre une variable indépendante x (en abscisse) et une variable dépendante y (en ordonnée). Dans ce cas, x et y sont reliées par la relation linéaire :

$$y = a + bx.$$

4.2.1 Principe

Supposons qu'on dispose de n couples (x_i, y_i), pour $i = 1, ..., n$. Les valeurs x_i, y_i étant les valeurs expérimentales mesurées. Si on place dans un plan (xy) les points correspondants aux couples formés (x_i, y_i) on obtient un nuage de points formant une courbe dite courbe de dispersion (voir Fig.5).
Effectuer une régression linéaire consiste à trouver la droite qui passe au plus près de l'ensemble des points de la courbe de dispersion. Cependant, il est possible de tracer une infinité de droites, chacune reliant un nombre divers de points. Donc,

comment déterminer la meilleure droite possible ?

Il y a de nombreux critères existants, le plus courant étant celui des "moindre carrés". Pour cela, on cherche une droite d'équation $y = a + bx$ (selon le modèle de régression linéaire), et on évalue l'erreur commise entre le point réel et le point de même abscisse sur la droite (voir Fig.5). Puisque l'erreur commise est tantôt positive, tantôt négative, et est de plus en général aléatoire, la moyenne de ces erreurs sera souvent nulle : la somme des erreurs est donc une mauvaise idée. L'astuce consiste à retenir comme grandeur la somme des carrés des erreurs, on

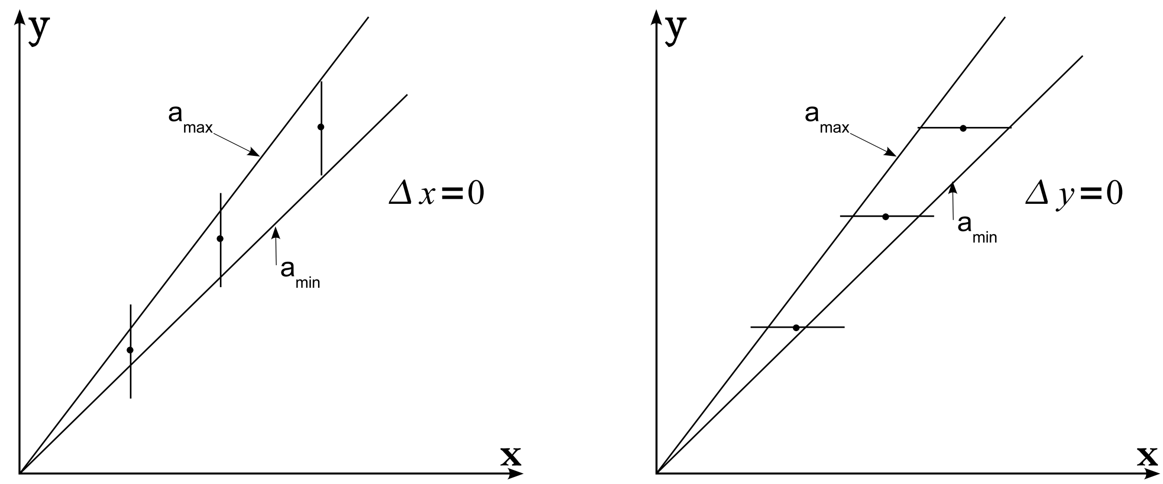

FIGURE 3 –

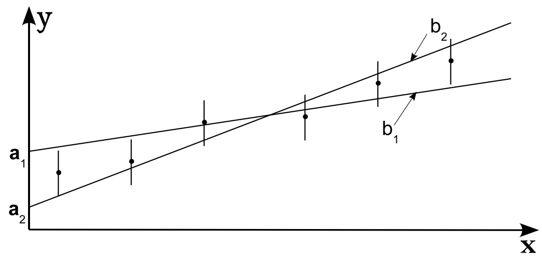

FIGURE 4 –

ajoute ainsi des grandeurs positives et c'est cette grandeur que l'on va chercher à minimiser, d'où l'appelation de critère des moindres carrés.
Les variables illustrées sur la figure 5 sont :
• x : la valeur de la variable indépendante.
• y : la valeur de la variable dépendante.
• $\hat{y}$: la valeur de y prédite par régression (à partir de l'équation $ax + b$), donc située sur la droite.
• b : la pente de la droite de régression, donc le rapport de l'accroissement de y par rapport à x.
• a : l'ordonnée à l'origine, ç-à-d, la valeur de $\hat{y}$ lorsque $x = 0$.
• $\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i$: l'erreur de prédiction au point x_i appelé résidus.
Le principe des moindres carrés revient à estimer les coefficients a et b par les valeurs qui minimisent la quantité :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(y_i - (a + bx_i))^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2. \end{aligned}$$

n étant le nombre totale de couples (x_i, y_i), ç-à-d, le nombre de mesures. Pour avoir S minimum,

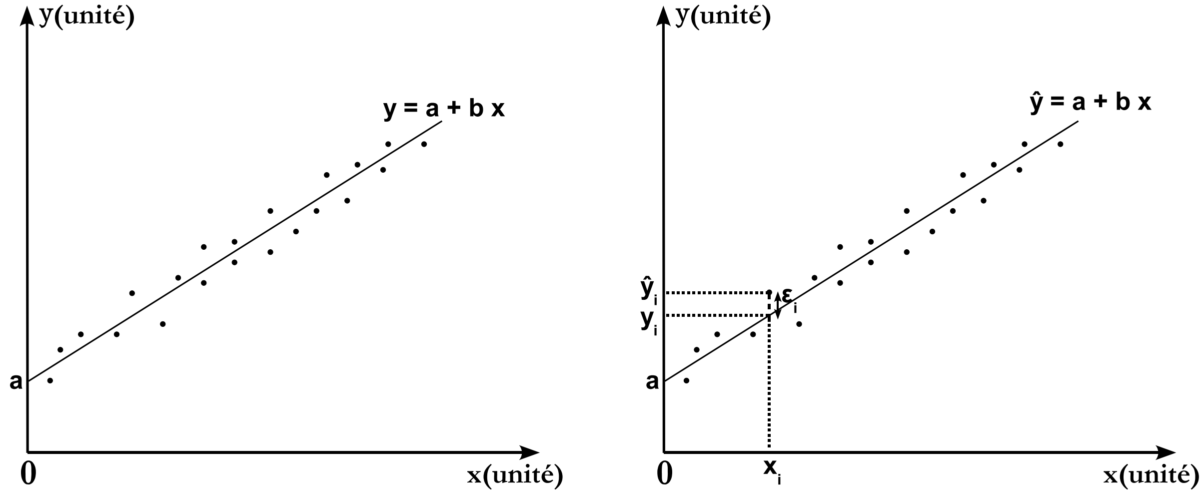

FIGURE 5 –

il faut donc effectuer

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \quad et \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

Alors les valeurs de a et b qui minimisent S sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{D_x} \\ \hat{b} &= \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{D_x} \\ D_x &= n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2. \end{aligned}$$

• $\hat{a}$ et $\hat{b}$ s'appellent les estimateurs des moindres carrés de a et b.
• $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$: s'appellent la valeur estimée ou la prédiction de y.
• la droite d'équation $y = \hat{a} + \hat{b}x$ s'appelle la droite de régression estimée de y sur x.
Pour alléger la notation nous allons dans ce qui va suivre noter $\hat{a}$ et $\hat{b}$ par a et b, respectivement.

Sachant calculer les meilleurs estimations des constantes a et b, il semble naturel d'évaluer aussi les incertitudes associées notées σ_a et σ_b, respectivement. Pour cela, il faut d'abord évaluer l'incertitude σ_y sur les mesures expérimentales $y_1, ..., y_n$. Celle-ci est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sqrt{\frac{1}{n-2} S} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + b x_i))^2} \end{aligned}$$

Ceci étant, on aurra alors :

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D_x}} \\ \sigma_b &= \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D_x}} \end{aligned}$$

•Dans le cas où la droite de régression linéaire passe par l'origine
On a l'équation de la droite $y = bx$, dans ce cas $a = 0$ et

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ \sigma_y &= \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i)^2} \\ \sigma_b &= \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}. \end{aligned}$$

Remarque : La méthode des moindres carrés est utilisable pour déterminer une droite même lorsque le nombre de points est petit ; la droite obtenue est toujours la meilleure. Nous pouvons donc l'utiliser au laboratoire chaque fois que nous cherchons une relation linéaire entre deux séries de grandeurs.
Il reste maintenant à vérifier si la droite de régression est de bonne qualité : si c'est le cas on pourra considérer que la relation est effectivement correcte, sinon, c'est que la relation de départ n'était pas bonne.

4.2.2 Coefficient de corrélation

Les analyses de régression et de corrélation, bien que liées, ne fournissent pas la même information sur la relation entre deux variables x et y. L'orsqu'il s'agit de prédire la variable y en fonction de la variable x, on a recours à la régression. Cependant, si l'on veut seulement obtenir une statistique décrivant la nature et le degré de la relation entre x et y on utilise plutôt un coefficient de corrélation. Souvent, on adopte une démarche en deux temps, ç-à-d qu'on développe d'abord une équation permettant de prédire y en fonction de x (régression), et qu'on mesure ensuite la force ou l'intensité de la relation qui unit x et y (corrélation).
Le coefficient de corrélation r est un indice variant entre -1 et $+1$ qui décrit la force de la relation entre deux variables x et y. Un coefficient positif signifie que les variables x et y évoluent dans le même sens tandis qu'un coefficient négatif signifie qu'elles ont des comportements opposés. Il est défini par :

$$\begin{aligned} r &= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{D_x D_y}} \\ D_y &= n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2. \end{aligned}$$

Plus le coefficient de corrélation r se rapproche de ± 1, plus l'équation de régression est fiable (bonne). S'il tend vers 0, ça nous informe que la relation entre x et y n'est pas linéaire.

Remarques : Les résultats utilisés dans la régression linéaire basés sur la méthode des moindres carrés (MMC) se base sur les hypothèses que :

- Les mesures en y sont également incertaines, ç-à-d, que $\Delta y_i = \text{cst}$ pour tout i.
- Les incertitudes en x restent négligeables.
- Quand il existe des incertitudes en x mais pas en y, il suffit de permuter leur rôle respectif dans l'analyse précédente.
- Les barres d'erreur définissent un intervalle d'un écart-type σ_y pour chacune des n valeurs expérimentales et la droite continue caractérise l'ajustement par moindre carrés.

5 Applications

5.1 Représentation graphique des points mesurés avec rectangles d'erreur

App.1 : Une pierre lancée verticalement vers le haut, avec une vitesse v à une hauteur h déterminée par la relation $v^2 = 2gh$. Pour vérifier que v^2 est proportionel à h, un étudiant mesure v^2 et h pour sept lancés différents et obtient les résultats du tableau.1
a-Tracez v^2 en fonction de h en précisant les barres d'erreur horizontales et verticales (comme d'habitude, utilisez du papier millimétré, spécifier les axes et choisissez l'échelle intelligemment). Votre dessin s'accorde-t-il avec la prédiction $v^2 \propto h$?
b- La pente de la courbe doit valoir $2g$. Pour la trouver, tracez les droites la plus pentue et la moins pentue qui restent raisonnablement en accord avec les données. Les pentes de ces deux droites donnent la plus grande et la plus petite valeur probable de la pente. Déduire la valeur et l'incertitude sur la pente moyenne. Vos résultats sont-ils cohérents avec la valeur acceptée $2g = 19.6\ m/s^2$.

Table 1 –

$h(m)$ $\Delta h = 0.05m$	v^2 (m^2/s^2)
0.4	7 ± 3
0.8	17 ± 3
1.4	25 ± 3
2.0	38 ± 4
2.6	45 ± 5
3.4	62 ± 5
3.8	72 ± 6

App.2 : Une résistance R soumise à un courant I délivre une puissance P donnée par la relation supposée $P = RI^2$. Pour la vérifier, un étudiant applique différents courants à une résistance inconnue immergée dans l'eau dont l'augmentation de température renseigne sur la puissance dissipée. Utiliser les résultats du tableau.2 pour tracer, avec les barres d'erreurs, P en fonction de I puis P en fonction de I^2. Déduisez du dernier tracé si l'expérience s'accorde avec la relation de proportionalité $P = RI^2$.

Table 2 –

$I(A)$ $\Delta I = 0$	$P(W)$ $\Delta P = 50\ W$
1.5	270
2.0	380
2.5	620
3.0	830
3.5	1280
4.0	1600

5.2 Méthode de régression linéaire

App.1 : Une balance à ressort.
Une étudiante confectionne une échelle de mesure des masses à l'aide d'un ressort. Fixant l'extrémité supérieure du ressort à un support, elle suspend à l'autre extrémité un plateau dont elle repère la position grâce à une règle placée derrière le dispositif. Afin de l'étalonner, c'est-à-dire connaître la relation entre les poids dans la balance et la longueur du ressort, elle se procure cinq poids pesant précisément 2 kg chacun. Les ajoutant successivement sur le plateau de la balance, elle mesure les longueurs l_i qu'elle reporte dans le tableau.3. Admettant que la longueur l suit une fonction linéaire de m

$$l = a + bm, \tag{1}$$

en utilisant la régression linéaire basée sur la méthode des moindres carrés trouvez les valeurs de a et b ainsi que les incertitudes associées. Tracez ses données d'étalonnage (points expérimentaux) et sa droite de régression (1). Calculer le coefficient de corrélation, quelle est la conclusion que vous pouvez donner. Une masse m placée sur le plateau de sa balance donne au ressort une longueur $l = 53.2$ cm, que vaut m ?

TABLE 3 –

Numéro de l'essai i	Masse $m_i(kg)$	Longueur $l_i(cm)$
1	2	42.0
2	4	48.4
3	6	51.3
4	8	56.3
5	10	58.6

App.2 : Mesure du zéro absolu à l'aide d'un thermomètre à gaz de volume constant.
Si le volume d'un échantillon de gaz idéal est maintenu constant, sa température T est une fonction linéaire de sa pression P :

$$T = A + BP. \tag{2}$$

La constante A est la température à laquelle la pression P atteint zéro (si le gaz ne se condense pas avant en liquide). Cette température du zéro absolu a pour valeur acceptée :

$$A = -273.15°C$$

La constante B dépend de la nature du gaz, de sa masse et de son volume. La mesure d'une série de valeurs pour T et P permet d'estimer les constantes A et B. En particulier, l'estimation de A donne accés à la température du zéro absolu.
Dans le tableau.4 sont représentées un ensemble de cinq mesures de P et T obtenues par un étudiant. Estimant que ses mesures de P ont une incertitude négligeable et que celles sur T sont toutes égales à quelques degrés, l'étudiant admet que ses valeurs s'ajustent à la droite (2). Que vaut sa meilleure estimation du zéro absolu A et son incertitude associée ? Calculer aussi la meilleure estimation de B et son incertitude ainsi que le coefficient de corrélation.

Sur la même feuille millimétrée, représenter les mesures du tableau.3 avec les segments d'erreur associés à ΔT et la droite de régression linéaire donnée par l'équation (2). Quelle est la conclusion que vous pouvez donner.

TABLE 4 –

Numéro de l'essai i	Pression $P_i(mm\ mercure)$	Température $T_i(°C)$
1	65	-20
2	75	17
3	85	42
4	95	94
5	105	127