

Chapitre 03 : Suites et Séries de fonctions

I. Suites de fonctions :

Soient K l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et I une partie non vide de K . Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I dans K est une application $n \mapsto f_n$ de \mathbb{N} dans l'ensemble des fonctions de I dans K .

1. Convergence simple d'une suite de fonctions :

Définition : Une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I dans K converge simplement vers la fonction f si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On note $f_n \rightarrow f$.

Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement, alors la limite est unique.

Quantification : $f_n \rightarrow f$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists \eta_x \text{ tel que pour tout } n \geq \eta_x \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Exemples :

- ❖ Soit pour tout entier n ,

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases},$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$

$$\text{par } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- ❖ $\forall n \geq 1$, on définit :

$$g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

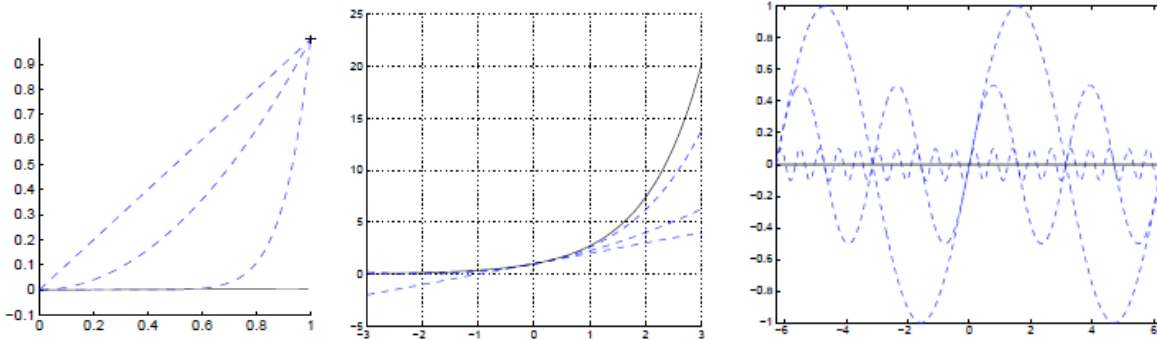
$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$, la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^x$.

- ❖ $\forall n \geq 1$, soit

$$h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$, la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h \equiv 0$ identiquement nulle.



Fonctions f_1, f_2, f_{10} et la limite f .

Remarques :

- Dans l'exemple 1, toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la fonction f ne l'est pas.
- Dans l'exemple 3, toutes les fonctions h_n sont continument dérivables sur \mathbb{R} , mais la suite $(h'_n)_n$ n'a pas de limite car $h'_n(x) = \cos(nx)$.
- Si on considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ telle que pour tout entier n , on a :

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow n^2 x^n (1-x)$$

On vérifie aisément que $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$, dont l'intégrale sur ce segment vaut 0, pourtant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{n+2} \right) = 1 \neq \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0$$

Ainsi la convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions : continuité, intégrabilité et dérivabilité comme le montre les exemples ci-dessus. Ceci justifie la définition d'une nouvelle forme de convergence, plus difficile à vérifier, mais valide pour les passages à la limite.

2. Convergence uniforme d'une suite de fonctions :

Définition : soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de I dans \mathbb{R} , et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sa limite simple. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I , et on note $f_n \rightrightarrows f$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq \eta \Rightarrow \forall x \in I; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq \eta \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

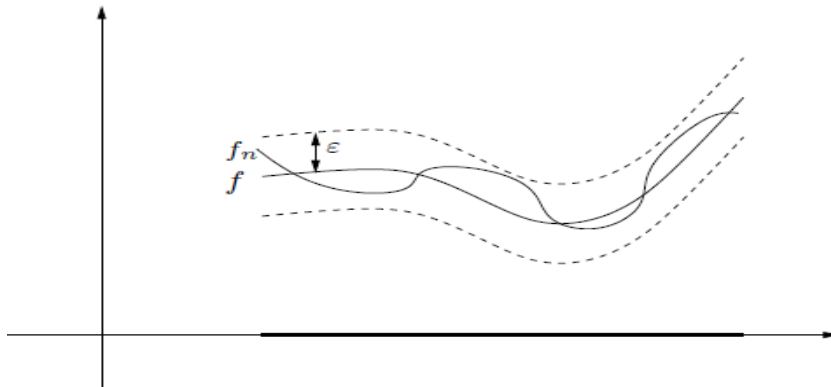
Ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq \eta \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$

Ce qui signifie $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

Remarque :

- Dans la convergence simple, η dépend de x , mais dans la convergence uniforme η ne dépend pas de x .
- La convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers f signifie qu'à partir d'un certain rang, la distance entre les fonctions f_n et la fonction f tendra vers 0. Ou bien les graphes des

fonctions f_n s'insèrent dans une bande de largeur 2ε autour du graphe de f (2ε est l'écart maximal autorisé pour la distance entre $f_n(x)$ et $f(x)$).



Exemples :

- ❖ Pour tout entier $n \geq 1$, soit

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto xe^{-nx}$$

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement, sur \mathbb{R}_+ , vers la fonction nulle.

$\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, f'_n(x) = (1 - nx)e^{-nx}$, d'où $\sup_{x \geq 0} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne}$. Et

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{ne} = 0$, ce qui signifie que $f_n \rightrightarrows f \equiv 0$, sur \mathbb{R}_+ .

- ❖ Pour tout entier n , soit

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n(1-x)$$

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement, sur $[0,1]$, vers la fonction nulle. Les fonctions

$f'_n(x) = (n - nx - x)x^{n-1}, \forall x \in [0,1]$ donc $\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$$\forall n \geq 0, 0 \leq \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq 1 - \frac{n}{n+1}$$

Forcément $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0$.

- ❖ La suite de fonctions $(f_n)_n$ telles que

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n$$

Converge simplement vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in [0,1[\end{cases}$$

Donc $|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 1 \\ x^n & \text{si } x \in [0,1[\end{cases} \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\rightarrow 0$

Ce qui prouve que la suite ne converge pas uniformément vers la fonction nulle.

❖ La suite de fonctions $(f_n)_n$ telles que

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$$

Converge simplement vers la fonction nulle sur l'ensemble des réels. En plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\| = 0 \Rightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ sur } \mathbb{R}$$

3. Propriétés de la convergence uniforme :

Proposition 01 : soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions de I dans \mathbb{R} , et $I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , alors elle converge simplement vers f :

La convergence uniforme entraîne la convergence simple

Proposition 02 : La somme de deux suites de fonctions uniformément convergentes est une suite de fonctions uniformément convergente.

Théorème de continuité : Soit la suite $(f_n)_n$ des fonctions continues sur I ,

Si $f_n \rightrightarrows f$ sur I alors f est continue sur I .

Théorème d'intégration : Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions continues sur I , convergeant uniformément vers la fonction f sur I , alors :

$$\text{pour tout compact } [a, b] \subseteq I, \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Théorème de dérivation : Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions continument dérivables sur $I = [a, b]$, vérifiant les conditions :

- $\exists x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge.
- La suite des dérivées $(f_n')_n$ est uniformément convergente, sur I , vers une fonction g .

Alors : La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément, sur I , vers une fonction dérivable f telle que $f' \equiv g$.

II. Séries de fonctions :

Définition : Soit $(f_n)_n$ une suite des fonctions telles que $\forall n \geq 0, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle série de fonctions de terme général f_n , notée $\sum_{n \geq 0} f_n$, la suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_n$, où pour tout entier n on a $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ ou encore $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x); \forall x \in I$.

La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ est la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ pour tout $x \in I$.

1. Convergence simple d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Si pour tout $x \in D \subseteq I$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge, on dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur D .

- D est dit le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.
- Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge sur I , on définit la fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in I$$

f est la somme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$.

- On définit le reste de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$, noté (R_n) , par

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x), \forall x \in I$$

Exemples :

- ❖ Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0, f_n(x) = x^n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Donc $\sum_{n \geq 0} x^n$ est une série géométrique qui converge si et seulement si $|x| < 1$. D'où $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1, 1[$, vers la fonction $S(x) = \frac{1}{1-x}$.

- ❖ Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{array}{l} f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^n}{n!} \end{array}$$

On a $\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Donc la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument pour tout réel x , d'après le critère de D'Alembert de convergence absolue.

- ❖ La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{array}{l} f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2 + n^2}} \end{array}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2 + n^2}}$ est une série alternée convergente pour tout réel x , car la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + n^2}} \right)_n$ est positive décroissante vers 0 quand n tend vers l'infinie.

Remarque : Etudier la convergence simple d'une série de fonctions revient à fixer $x \in I$, et étudier la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

2. Convergence uniforme d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ telle que $\forall n \geq 0, f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers une fonction f sur I si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément vers f sur I .

i.e. ssi $S_n \rightrightarrows f$ sur I

i.e. ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{x \in I} |S_n(x) - f(x)|) = 0$

i.e. ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{x \in I} |R_n(x)|) = 0$ ou encore $R_n \rightrightarrows 0$ sur I

D'où : une série de fonctions converge uniformément sur I si et seulement si son reste converge uniformément vers 0 sur I .

Exemples :

❖ Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ telle que $\forall n \geq 1, \begin{cases} f_n: & \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow & \frac{(-1)^n}{x+n} \end{cases}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée convergente pour toute valeur positive x , car la suite $\left(\frac{1}{x+n}\right)_{n \geq 1}$ est positive décroissante vers 0. Donc cette série des fonctions converge simplement sur \mathbb{R}^+ .

Pour montrer qu'elle converge uniformément sur \mathbb{R}^+ , il faut et il suffit de montrer que son reste converge uniformément vers 0 :

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est une série alternée convergente, alors

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x+n+1}$$

D'où $\forall x \geq 0, |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq \sup_{x \geq 0} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$

Ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{x \geq 0} |R_n(x)|) = 0$ i. e $R_n \rightrightarrows 0$ sur \mathbb{R}^+ .

Proposition 01 : Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I , alors la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

$$\sum_{n \geq 1} f_n \text{ converge uniformément sur } I \Rightarrow (f_n \rightrightarrows 0 \text{ sur } I)$$

Remarque: La convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ vers la fonction nulle est une condition nécessaire non suffisante pour la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$. Donc si $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur I alors la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I .

Exemple : Considérons la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ telle que $\forall n \geq 1, \begin{cases} f_n: & \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow & nx^2 e^{-x\sqrt{n}} \end{cases}$

La série $\sum_{n \geq 1} nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ est à termes positifs pour toute valeur réelle de x , on applique le critère de Riemann :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 nx^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0, \forall x \geq 0.$$

Donc la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ .

Vérifions que cette série de fonctions ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ ; pour cela on montre que la suite de fonctions $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle :

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} nx^2 e^{-x\sqrt{n}} = 0, \forall x \geq 0$, ce qui signifie que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}^+ . Les fonctions $f'_n(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}, \forall x \geq 0$, donc

$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \not\rightarrow 0$. D'où ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, et par conséquent la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur l'ensemble des réels positifs.

Proposition 02 :

- Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément vers f sur I , alors elle converge simplement vers f sur I .
- Si les séries de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ et $\sum_{n \geq 0} g_n$ convergent uniformément vers les fonctions f et g sur I , alors pour toute valeur réelle α , la série $\sum_{n \geq 0} (f_n + \alpha g_n)$ converge uniformément vers $(f + \alpha g)$ sur I .

Théorème d'Abel de convergence uniforme : La série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément sur I , si

- $\exists M > 0$ tq $\forall n \geq 0, |\sum_{k=0}^n f_k(x)| \leq M, \forall x \in I$
- La suite de fonctions $(g_n(x))_n$ positive, décroissante et $g_n \rightarrow 0$ sur I .

3. La convergence normale d'une série de fonctions :

Définition : Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ définie sur un domaine D (i.e. la série converge simplement sur D). S'il existe une série numérique positive convergente $\sum_{n \geq 0} a_n$ vérifiant :

$$\forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n$$

Alors on dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur D .

Autrement dit, la série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge}$$

i.e. $\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \sup_{x \in D} |f_n(x)| \leq a_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge

i.e. $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|$ converge.

Exemple :

- ❖ Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$
On a $\forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$ converge normalement sur \mathbb{R} .
- ❖ Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}, x \in [1, +\infty[$.
On a $f_n(x) = ne^{-x\sqrt{n}}$, et $f_n'(x) = -n\sqrt{n}e^{-x\sqrt{n}} \leq 0, \forall x \in [1, +\infty[$.
Donc $\sup_{x \in [1, +\infty[} |f_n(x)| = f_n(1) = ne^{-\sqrt{n}}$, et la série $\sum_{n \geq 0} ne^{-\sqrt{n}}$ converge d'après le critère de Riemann, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 ne^{-\sqrt{n}} = 0$. D'où la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} ne^{-x\sqrt{n}}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Remarques :

- La convergence normale entraîne la convergence absolue, en effet :

La série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge}$$

Donc, et d'après le critère de comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} |f_n(x)|$ converge ce qui signifie que la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge absolument sur D.

- La convergence normale entraîne la convergence uniforme, en effet :

La série converge normalement sur D si :

$$\exists a_n \geq 0, \forall n \geq 0, \forall x \in D, |f_n(x)| \leq a_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge}$$

Ce qui implique $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$, comme $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge son reste tendra vers 0 (indépendamment de x), d'où

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sup_{x \in D} |R_n(x)|) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = 0$$

i.e. $R_n \Rightarrow 0$ sur D $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur D.

<i>La convergence normale</i>	\Rightarrow	<i>La convergence uniforme</i>
\Downarrow		\Downarrow
<i>La convergence absolue</i>	\Rightarrow	<i>La convergence simple</i>

Exemples :

- ❖ On a déjà démontré que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur \mathbb{R}^+ , mais $\left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \frac{1}{x+n} \sim \frac{1}{n} \forall x \geq 0$, comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas absolument sur \mathbb{R}^+ .

D'autre part, $\sup_{x \geq 0} \left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}^+ .

Ainsi la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément, mais pas normalement, ni absolument sur \mathbb{R}^+ .

- ❖ Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n}$ avec $x \in]0,1]$.

On a $\left| \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n} \right| = \frac{1}{x^2 n^2 + n} \leq \frac{1}{x^2 n^2} \forall x \in]0,1]$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2 n^2}$ converge (série de Riemann), donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n}$ converge absolument sur $]0,1]$.

Etudions sa convergence uniforme : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{x^2 n^2 + n}$ est une série alternée convergente sur $]0,1]$, alors son reste est majoré par

$$\forall x \in]0,1], |R_n(x)| \leq f_{n+1}(x) = \frac{1}{x^2(n+1)^2+n+1} \Rightarrow \forall x \in]0,1], |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

$$D'où \ 0 \leq \sup_{x \in]0,1]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

i.e. $R_n \rightarrow 0$ sur $]0,1]$, la série est donc uniformément convergente sur $]0,1]$.

Mais: $\sup_{]0,1]} \frac{1}{x^2 n^2 + n} = \frac{1}{n}$, ce qui signifie que la série ne converge pas normalement, bien qu'elle est absolument et uniformément convergente.

Récapitulatif des différentes techniques pour démontrer la convergence uniforme :

- ✓ Déterminer le domaine de convergence simple, puis montrer que la suite de fonctions des restes $(R_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur ce domaine.
- ✓ Montrer la convergence normale, en

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouvant } a_n \geq 0 \text{ tel que } |f_n(x)| \leq a_n, \text{ pour tout } x \text{ et } \sum_{n \geq 0} a_n \text{ converge} \\ \text{ou bien, en calculant } \sup_{x \in D} |f_n(x)| = b_n \text{ et } \sum_{n \geq 0} b_n \text{ converge} \end{array} \right.$$

- ✓ Appliquer le théorème d'Abel de convergence uniforme.

4. Théorème généraux sur les séries de fonctions :

Théorème de continuité : Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues sur I , convergant uniformément sur I , alors sa somme est une fonction continue sur I .

$$\text{i.e. } \forall x_0 \in I; \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x_0)$$

Exemple : Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$, pour tout entier $n \geq 1$, les fonctions $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ sont continues sur l'ensemble des réels.

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série convergente, alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge normalement et donc uniformément sur \mathbb{R} .

D'après le théorème de continuité, la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$ est continue sur \mathbb{R} , donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+n^2} = 0.$$

Théorème d'intégration : Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ une série de fonctions continues sur I , convergant uniformément sur I , alors

$$\text{pour tout compact } [a, b] \subseteq I, \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Exemple : Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x^n$ avec $|x| \leq r < 1$

On a $|x|^n \leq r^n, \forall x \in [-r, r]$, avec $r < 1$. Ceci signifie que la série $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-r, r]$.

En plus, les fonctions $f_n(x) = x^n$ sont continues sur $[-r, r]$, d'où et d'après le théorème d'intégration, on a

$$\forall x \in [-r, r], 0 < r < 1, \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt$$

$$\text{Donc } \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \forall x \in [-r, r], 0 < r < 1$$

Théorème de dérivation : Soit $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ une série de fonctions continument dérivables sur $[a, b]$
Si :

- $\exists x_0 \in [a, b]$ tq $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ converge ; et
- $\sum_{n \geq 0} f'_n(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$ et a pour somme la fonction g
Alors la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge uniformément sur $[a, b]$, et sa somme f est dérivable avec $f' \equiv g$ ie $(\sum_{n \geq 0} f_n(x))' = \sum_{n \geq 0} f'_n(x)$.

Exemple : Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} ne^{-nx}$, $x \in [1, +\infty[$.

$$\forall x \geq 1, ne^{-nx} \leq ne^{-n} \text{ et } \sum_{n \geq 1} ne^{-n} \text{ converge car } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 ne^{-n} = 0$$

Donc $\sum_{n \geq 1} ne^{-nx}$ converge normalement sur $[1, +\infty[$. D'autre part, les fonctions $f_n(x) = e^{-nx}$ sont continument dérivables sur $[1, +\infty[$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} e^{-nx}$ converge d'après le critère de Riemann ($\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 e^{-xn} = 0$). D'où

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-nx})' = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \right)' = \left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \right)'$$

$$\text{Alors } \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$