**Corrigé du sujet**

**Partie A (12 pts)**

1. Energie cinétique du système $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2$ 0.5

Energie potentielle du système $U = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2$ 0.5

Fonction de dissipation du système $D = \frac{1}{2} \alpha_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha_2 \dot{y}_2^2$ 0.5

2. Système d'équations différentielles du système

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + \alpha_1 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + k_2 y_2 + \alpha_2 \dot{y}_2 + \alpha_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = F(t) \end{cases}$$ 2

3. Impédance d'entrée du système

On écrit le système précédent en termes de vitesse

$$\begin{cases} (\alpha_1 + j(m_1\omega - \frac{k_1}{\omega}))\dot{y}_1 - \alpha_1 \dot{y}_2 = 0 \\ -\alpha_1 \dot{y}_1 + (\alpha_2 + \alpha_1 + j(m_2\omega - \frac{k_2}{\omega}))\dot{y}_2 = F(t) \end{cases}$$

Apres calcul, on tire $Z_e = \frac{F(t)}{\dot{y}_2}$

$$Z_e = \left(\alpha_2 + \alpha_1 + j\left(m_2\omega - \frac{k_2}{\omega}\right)\right) - \frac{\alpha_1{}^2}{(\alpha_1 + j(m_1\omega - \frac{k_1}{\omega}))}$$ 2

4. Impédance d'entrée pour $\omega^2 = \frac{k_1}{m_1}$

$$Z_e = \left(\alpha_2 + j\left(m_2\omega - \frac{k_2}{\omega}\right)\right)$$ 0.5

5. Vitesses instantanées $\dot{y}_1(t)$ et $\dot{y}_2(t)$ dans le cas $\omega^2 = \frac{k_1}{m_1}$ et $k_2 = 2k_1$ et $m_1 = m_2$

Dans ce cas on a :

$Z_e = \alpha_2 - j\frac{k_1}{\omega}$

$|Z_e| = \sqrt{\alpha_2{}^2 + k_1 m_1}$ et $\tan \emptyset = -\frac{\sqrt{k_1 m_1}}{\alpha_2}$

$\dot{y}_2(t) = \frac{F_0}{\sqrt{\alpha_2{}^2 + k_1 m_1}} \cos(\omega t - \emptyset)$ 1

$\dot{y}_1(t) = \dot{y}_2(t)$ de 3. 0.5

6. Puissance instantanée fournie par le générateur mécanique

$P_f(t) = F(t)\, \dot{y}_2$

0.5

$$P_f(t) = \frac{F_0^2}{\sqrt{\alpha_2{}^2 + k_1 m_1}} \cos \omega t \cos(\omega t - \emptyset)$$

Puissance instantanée dissipée par le système

$$P_d(t) = \alpha_1 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + \alpha_2 \dot{y}_2^2 = \alpha_2 \dot{y}_2^2$$

0.5

$$P_d(t) = \alpha_2 \frac{F_0^2}{\alpha_2{}^2 + k_1 m_1} \cos^2(\omega t - \emptyset)$$

Les puissances instantanées fournie et dissipée sont différentes

7. Puissance moyenne fournie

$<P_f(t)>=\frac{1}{T}\int_0^T P_f(t)dt$

0.5

$$< P_f(t) >= \frac{F_0^2}{\sqrt{{\alpha_2}^2 + k_1 m_1}} < \cos\omega t \cos(\omega t - \emptyset) >$$

En tenant compte de la relation trigonométrique donnée en haut

$$< P_f(t) >= \frac{F_0^2}{\sqrt{{\alpha_2}^2 + k_1 m_1}} \frac{\cos\emptyset}{2}$$

$$\cos\emptyset == \frac{\alpha_2}{\sqrt{{\alpha_2}^2 + k_1 m_1}}$$

D'où :

$$< P_f(t) >= \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 F_0^2}{{\alpha_2}^2 + k_1 m_1}$$

1

8. Puissance moyenne dissipée

$<P_d(t) >= \alpha_2 \frac{F_0^2}{{\alpha_2}^2+k_1 m_1} < \cos^2(\omega t - \emptyset) >$

1

$$< P_d(t) >= \frac{1}{2} \frac{\alpha_2 F_0^2}{{\alpha_2}^2 + k_1 m_1}$$

Les puissances moyennes sur une période sont égales.

1

$$< P_f(t) >=< P_d(t) >$$

**<u>Partie B (8 points)</u>**

1. Les équations locales de Maxwell dans le vide :

<u>Maxwell-Gauss</u>: $div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$

$\vec{E}$ peut diverger à partir du point où se trouvent les charges électriques. **(0,5pt)**

<u>Maxwell-Flux:</u> $div\,\vec{B} = 0$

Pas des monopôles magnétiques. **(0,5pt)**

<u>Maxwell-Faraday</u>: $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Un champ $\vec{B}$ variable donne naissance à un champ électrique (induction). **(0,5pt)**

<u>Maxwell- Ampère:</u> $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

Les sources d'un champ magnétique sont le courant de conduction et la variation du champ électrique.

**(0,5pt)**

2. Dans un vide dépourvu de charges et de courants ($\rho = 0, \vec{j} = 0$), les deux composantes de l'onde électromagnétique ($\vec{E}, \vec{B}$) satisfont à la même équation :

$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$ et $\vec{\Delta}\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$ équation de D'Alembert **(0,5pt)**

3. Un conducteur parfait est un conducteur dont la conductivité $\gamma$ est infinie

$\Rightarrow$ Le champ électrique est nul $\overrightarrow{\boldsymbol{E_2}} = \vec{\mathbf{0}}$ **(0,25pt)**

sinon la puissance par unité de volume dissipée par effet Joule $P_{Joule} = \vec{J}.\vec{E} = \gamma\vec{E}^2$ serait infinie, ce qui est absurde, **(0,25pt)**

L'équation de Maxwell-Faraday $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\overrightarrow{rot}\,\vec{E}$ donne $\vec{B}$ statique $\Rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{B_2}} = \vec{\mathbf{0}}$ **(0,5pt)**

4. D'après les conditions aux limites :

$\vec{E}_1(z=0) = \vec{E}_2(z=0) = \vec{0}$ **(0,5pt)**

$\vec{E}_1(z=0) = \vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{0}$ **(0,5pt)**

$E_{rx}(z=0) = -E_{ix}(z=0)$

$E_{ry}(z=0) = -E_{iy}(z=0)$

D'où: $\vec{E}_r = -E_0\,cos(wt + k.z)\,\vec{u}_x + E_0\,sin(wt + k.z)\,\vec{u}_y$ **(0,5pt)**

$\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} sin(wt + k.z)\,\vec{u}_x + \frac{E_0}{c} cos(wt + k.z)\,\vec{u}_y$ **(0,5pt)**

5. Le champ résultant :

$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = 2E_0\,sin\,(kz)\,(sin(wt)\,\vec{u}_x + cos(wt)\,\vec{u}_y)$ **(0,5pt)**

$\vec{B}_2 = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{2E_0}{c} cos\,(kz)\,(sin(wt)\,\vec{u}_x + cos(wt)\,\vec{u}_y)$ **(0,5pt)**

6. Le champ résultant ne correspond pas à la propagation d'une onde car les variables spatiale et temporelle sont séparées. Le critère de propagation n'est pas vérifié, l'onde résultante n'est pas progressive mais stationnaire. **(0,5pt)**

7. vecteur de Poynting : $\vec{P} = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_2}{c} = \vec{0}$ **(0,5pt)**

Le vecteur de Poynting est partout égal au vecteur nul, ce qui signifie qu'il n'y a pas un transport de l'énergie : l'énergie transportée par l'onde incidente égale à celle transportée par l'onde réfléchie dans le sens inverse. **(0,5pt)**

$$< P_f(t) > = < P_d(t) >$$